3. Énoncés des exercices

Exercice 6.1 On considère les matrices suivantes : I matrice identité d'ordre 3, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et 0 matrice nulle d'ordre 3.

1. Calculer A^2, A^3. En déduire pour tout $n > 3$ la valeur de A^n.
2. A tout nombre réel x, on associe la matrice notée $M(x)$, où $M(x) = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2$ (R_1).
   (a) Déterminer $M(0)$, et $B = M(4)$.
   (b) x et y étant deux réels quelconques, calculer en utilisant la relation (R_1) le produit $M(x) \times M(y)$.
   (c) Montrer l'égalité : $M(x) \times M(y) = M(x + y)$ (R_2).
3. Vérifier que $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. En utilisant les résultats de la question 2, déterminer le nombre réel x' tel que $M(x) \times M(x') = I$.
   En déduire une matrice B' telle que $B \times B' = I$.

Exercice 6.2 1. Lemme : Soient A et B deux matrices carrées d'ordre p qui commutent. Démontrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^kB = BA^k$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(A + B)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} A^iB^{n-i}$

Exercice 6.3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On pose $B = A - I_3$. Calculer B^2 et B^3.
2. On souhaite calculer $A^n = (B + I_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer $(B + I_3)^n$? Pourquoi ?
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$ on a $A^n = (B + I_3)^n = \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2$.
   En déduire l'expression de A^n pour tout $n \geqslant 3$.
   (c) L'expression de A^n trouvée dans la question précédente reste-t-elle valable pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$?

Exercice 6.4 Matrice de transition (processus stochastique)
On travaillera en dimension 3 pour simplifier le problème, mais cette démonstration se généralise en dimension quelconque. Soit un processus aléatoire comprenant trois états : A, B, C. On notera A_n l'événement "se trouver dans l'état A à l'instant n", B_n l'événement "se trouver dans l'état B à l'instant n", et C_n l'événement "se trouver dans l'état C à l'instant n".

1. Faire un arbre décrivant la situation, à partir d'un "point de départ" depuis lequel on notera, sur trois branches, x_n la probabilité de se trouver dans l'état A_n, y_n la probabilité de se trouver dans l'état B_n, z_n la probabilité de se trouver dans l'état C_n.
   On notera pour les branches suivantes : $a_{11} = P_{A_n}(A_{n+1})$; $a_{12} = P_{A_n}(B_{n+1})$; $a_{21} = P_{B_n}(A_{n+1})$, etc....
2. Écrire la matrice de transition correspondante T.
3. On note $U_n = \begin{pmatrix} x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}$ la matrice-ligne associée à la loi de probabilité à l'instant n, et U_0 la matrice-ligne donnant la loi de probabilité initiale.
4. Démontrer que $U_{n+1} = U_n \times T$
5. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = U_0T^n$.

Exercice 6.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On souhaite calculer A^n pour tout entier n. Posons $A = N + D$, où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $DN = ND$
2. Calculer N^2
3. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $A^n = (N+D)^n = \binom{n}{0} D^n + \binom{n}{1} ND^{n-1}$
4. Calculer D^n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \geqslant 2$.
5. L'expression de A^n calculée dans la question précédente reste-t-elle valable pour $n = 0$? Pour $n = 1$?

Exercice 6.6 On souhaite étudier le comportement des puissances n-ièmes de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix}$ lorsque n devient très grand ("comportement asymptotique").
On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Avec une calculatrice, calculer A^5, A^8, A^{10}. Que constate-t-on ?
2. Démontrer que l'on a $AP = PD$.
3. Démontrer que P est inversible, et calculer P^{-1}.
4. En déduire que $A = PDP^{-1}$, et démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. Donner l'expression de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. On fait tendre n vers l'infini, démontrer que les coefficients de la matrice A^n convergent vers ceux de la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Comparer avec les résultats obtenus à la question 1.

Exercice 6.7 Application de la première méthode
On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$, et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$, avec :
$A = \begin{pmatrix} -0,25 & -0,25 \\ 1,5 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -13 \\ 12 \end{pmatrix}$.

1. Soit la matrice-colonne $X = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \end{pmatrix}$. Vérifier que $AX + B = X$.
2. Soit $V_n = U_n - X$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $V_{n+1} = AV_n$
   (b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $V_n = A^nV_0$
3. On obtenu grâce à un logiciel de calcul formel (*abracadabra ça sort d'un chapeau : essayez de le démontrer par récurrence*) : $A^n = \begin{pmatrix} 3(0,25)^n - 2(0,5)^n & (0,25)^n - (0,5)^n \\ 6(0,5)^n - 6(0,25)^n & -2(0,25)^n + 3(0,5)^n \end{pmatrix}$
   (a) En déduire les coefficients de V_n en fonction de n
   (b) En déduire les limites des coefficients de U_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6.8 Application de la deuxième méthode
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. On définit la suite (U_n) de matrices par $U_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$.

1. Peut-on trouver une matrice colonne de format 2×1 telle que $X = AX + B$?
2. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n = A^nU_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right) B$.
3. On a obtenu, par diagonalisation de A (*ça sort d'un chapeau, mais c'est parce qu'il s'agit du programme de l'an prochain*) : $A^n = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3+4\left(-\frac{1}{6}\right)^n & 4-4\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ 3-3\left(-\frac{1}{6}\right)^n & 4+3\left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$ Étudier la limite de A^n quand n tend vers l'infini.
4.
   - Exprimer U_n en fonction de n
   - Étudier la convergence de la suite (U_n).

Exercice 6.9 Pour tout entier naturel n on définit les suites (a_n) et (b_n) par : $\begin{cases} a_0 = 1, b_0 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n \end{cases}$
L'objectif de cet exercice est de déterminer une expression explicite du terme général de ces suites.

Partie I

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n = 1$. remarquer que l'on a notamment $b_n = 1 - a_n$ pour tout entier naturel n.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = -\frac{1}{6}a_n + \frac{1}{2}$.
3. La suite (a_n) est une suite arithmético-géométrique : nous pouvons étudier son comportement grâce à l'utilisation d'une suite auxiliaire.
   (a) On pose $u_n = a_n - \frac{3}{7}$ pour tout entier n. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique, dont on donnera le premier terme et la raison.
   (b) En déduire l'expression de u_n , puis de a_n et enfin de b_n en fonction de n.

Partie II

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Démontrer que l'on a $U_{n+1} = MU_n$ pour tout n, où M est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on précisera.
2. Démontrer par récurrence que pour tout n on a$U_n = M^n U_0$.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible, et calculer son inverse.
4. Démontrer que $D = P^{-1}MP$ est une matrice diagonale dont on précisera l'expression.
5. En déduire que $M = PDP^{-1}$ puis démontrer que, pour tout n, on a $M^n = PD^nP^{-1}$. Donner l'expression de la matrice M^n en fonction de n.
6. En utilisant la question 3, déterminer les termes généraux des deux suites (a_n) et (b_n). Comparer avec le résultat obtenu à la fin de la partie I.

Exercice 6.10 Suite de Fibonacci - version modifiée, où l'on effleure les notions de valeurs propres et vecteurs propres pour diagonaliser
Au début du XIII° siècle, Léonard de Pise, dit Fibonacci, propose un problème à propos de la reproduction des lapins, qui se ramène à l'étude de la suite (F_n), dite "de Fibonacci", définie par :
$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

1. (a) Calculer les dix premiers termes de la suite (F_n) définie ci-dessus.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$.
   Démontrer que l'on a $U_{n+1} = AU_n$, où A est une matrice carrée d'ordre 2 à déterminer.
   (c) En déduire l'expression de U_n en fonction de U_0.
2. Diagonalisation de A :
   On cherche un réel x tel qu'il existe une matrice colonne non nulle V telle que $AV = xV$.
   Un tel réel x s'appelle une valeur propre, et le vecteur V est une vecteur propre associé à x.
   (a) Montrer que $AV = xV \Leftrightarrow (A - xI_2)V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   En déduire que $A - xI_2$ ne doit pas être inversible.
   (b) Quelles sont les deux valeurs possibles pour x ? On les notera λ et μ, avec λ la plus grande des deux. *λ et μ sont appelées valeurs propres de A.*
   (c) Déterminer deux matrices colonnes V et W, non proportionnelles, telles que $AV = \lambda V$ (*V est un vecteur propre associé à la valeur propre λ*) et $AW = \mu W$ (*W est un vecteur propre associé à la valeur propre μ*).
   Ces vecteurs propres forment la "nouvelle base", dans la quelle A sera diagonale, et sa forme diagonale notée D. La matrice P sera la matrice de changement de base.
   (d) En déduire la matrice diagonale D et la matrice carrée P telles que $A = PDP^{-1}$ *(cette écriture permet de changer de base pour se ramener à une matrice diagonale ; cela s'appelle diagonaliser).*
   (e) Montrer que pour tout n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (f) En déduire les coefficients de A^n.

3. (a) Déduire de la question 1.c. que le terme général de la duite (F_n) est :

$$F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

   (b) Vérifier cette formule pour $n = 2$ et $n = 3$.

   (c) Vérifier que l'on a donc

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

   Déterminer la limite de la suite (F_n).

   (d) Étudier le comportement de $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ quand n tend vers $+\infty$

Exercice 6.11 suites homographiques
Soient a, b, c, d quatre réels (avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$ - pourquoi ?-).
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ et A la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Enfin soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -\frac{d}{c}$.

Partie I

1. Que peut-on dire de la suite (u_n) si on a $c = 0$ (et $d \neq 0$) ? Et si $ad - bc = 0$?
2. Exprimer u_1 puis u_2 en fonction de u_0 et des quatre réels a, b, c, d.
3. On définit la suite de matrices-colonnes (X_n) par $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
   Calculer X_1 et X_2, et rapprocher les résultats de ceux obtenus à la question précédente.
4. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A^n X_0$ et $u_n = \frac{p_n}{q_n}$

Partie II

Dans cette partie, on prendra $a = 4$, $b = -6$, $c = 3$, $d = -5$ et $u_0 = 5$.

1. A la calculatrice, calculer des valeurs approchées des dix premiers termes de la suite (u_n).
   L'objectif de cette partie est de déterminer une forme explicite des termes de cette suite et d'en étudier la convergence.
2. Posons $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Démontrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale dont on donnera les coefficients.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
3. Déduire de la partie I et de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = \begin{pmatrix} -3 \times (-2)^n + 8 \\ -3 \times (-2)^n + 4 \end{pmatrix}$
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n. Démontrer que la suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 6.12 Doudou, le hamster paresseux, n'a que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange, et la roue où il fait de l'exercice.
Ses journées se ressemblent toutes : toutes les minutes, il peut changer d'activité ou continuer ce qu'il fait.
Doudou n'a aucune mémoire ...

- Quand il dort, la probabilité qu'il continue à dormir est 0,9.
- Quand il se réveille, il va manger ou faire de l'exercice, de façon équiprobable.
- Un repas de Doudou ne dure qu'une minute ; après, il fait autre chose.
- Après avoir mangé, il part dans sa roue avec une probabilité de 0,3, ou retourne dormir.

- Quand il court, il part dormir la minute suivante avec une probabilité de 0,8 ; sinon, il continue de courir en oubliant qu'il est déjà un peu fatigué :-)

1. Déterminer la matrice de transition M de ce système en prenant les activités ”Dormir”, ”Manger” et ”Courir” dans cet ordre.
2. Initialement, Doudou dort. Quelle est la probabilité que, 2 minutes plus tard, Doudou dorme encore ? Qu'il mange ? Qu'il coure ?
3. (a) A la calculatrice, calculer M^{20}, M^{30}, M^{40}, M^{100}.
   Quelle conjecture peut-on faire sur la suite de matrice (M^n) ? On admet ce résultat.

   (b) Avec ce modèle, à long terme, quel sera le temps de sommeil probable de Doudou chaque jour ?